



LEIC, LERCI, LEE

Probabilidades e Estatística

Soluções de alguns Exercícios

2004/05

Capítulo 3

Variáveis aleatórias discretas

Exercício 3.5 Note-se que

i	1	2	3	4	5
ω_i	0	1	2	3	4
$P(\omega_i)$	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1
$X(\omega_i)$	-8	-2	4	6	8

donde,

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1 & x = -8, 8 \\ 0.2 & x = -2 \\ 0.3 & x = 4, 6 \\ 0 & \text{r.v. } x \end{cases}$$

Consequentemente

$$E[X] = \sum_{x \in \{-8, -2, 4, 6, 8\}} xP(X = x) = 2.6; \quad P(X < 0) = P(X = -8) + P(X = -2) = 0.3.$$

Exercício 3.6

$$(a) \quad P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 0 \\ \frac{1}{12} & x = 2 \\ \frac{1}{4} & x = 4 \\ \frac{1}{2} & x = 6 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$$(b) \quad i) \quad P(X \leq 1) = F_X(1) = \frac{1}{6}.$$

- ii) $P(X > 5) = 1 - F_X(5) = \frac{1}{2}$.
- iii) $P(0 < X \leq 2) = F_X(2) - F_X(0) = \frac{1}{12}$.
- iv) $P(2 \leq X < 6) = F_X(6^-) - F(2^-) = \frac{1}{3}$.

Exercício 3.8 Seja X a v.a. que contabiliza o número de pessoas, de entre 250 seleccionadas ao caso e sem reposição de um conjunto de 60000, que estão a ver o programa. Note-se que

$$X \sim HG(60000, 2000, 250)$$

pelo que

$$P(X \leq 4) = \sum_{i=0}^4 \frac{\binom{2000}{i} \binom{58000}{250-i}}{\binom{60000}{250}}.$$

Exercício 3.11 Seja N_s o número de bolhas de ar numa placa com s metros quadrados de área. Pode concluir-se que $N_s \sim \text{Poisson}(0.4s)$.

- (a) $P(N_5 > 2) = 0.3233$.
- (b) Seja Y o número de placas de $2.5m^2$ perfeitas de entre 10. Assumindo que a probabilidade de cada placa ser perfeita é constante e que as placas são ou não perfeitas independentemente umas das outras, vem que $Y \sim \text{Bin}(10, P(N_{2.5} = 0)) = \text{Bin}(10, e^{-1})$, donde a probabilidade pedida é $P(Y = 6) = \binom{10}{6} (e^{-1})^6 (1 - e^{-1})^4 = 0.0831$.
- (c) Seja Z o número de placas de vidro de $5m^2$ que é necessário observar até encontrar 2 perfeitas. A probabilidade pedida é $P(Z = 5) = \binom{4}{1} (e^{-2})^2 (1 - e^{-2})^3 = 0.0474$.

Exercício 3.14 Seja $N(s, t)$ o número de mensagens que chegam ao telégrafo no intervalo de tempo $(s, t]$ (em h). Pode concluir-se que $N(s, t) \sim \text{Poisson}(3(t - s))$.

- (a) $P(N(8, 12) = 0) = e^{-12}$.
- (b) Seja X a variável aleatória que designa o instante de tempo (em horas) em que a primeira mensagem da tarde chega ao telégrafo. Uma vez que X assume apenas valores superiores a 12 e $P(X \leq x) = P(N(12, x) \geq 1) = 1 - e^{-3(x-12)}$, para $x > 12$, tem-se

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 12 \\ 1 - e^{-3(x-12)} & x \geq 12 \end{cases}.$$

Assim $X \stackrel{d}{=} 12 + Y$ com $Y \sim \text{Exponencial}(3)$ (esta distribuição será vista mais tarde, no capítulo 4).

Exercício A6 Seja $X = \{X(s, t), s \leq t; s, t \in \mathbb{R}_0^+\}$, com $X(s, t) \sim \text{Poi}(10(t - s))$ (onde $X(s, t)$ contabiliza o número de chamadas que chegam ao servidor no intervalo $[s, t]$ (em horas)). Seja ainda $Y(s, t)$ o número de chamadas recebidas pelo servidor A no intervalo $[s, t]$ (em horas).

- (a) Note-se que, dadas as condições do problema (trata-se de uma filtragem de um Processo de Poisson), vem que $(Y(0, 1) | X(0, 1) = 10) \sim \text{Bin}(10, 0.2)$, pelo que

$$P(Y(0, 1) \geq 5 | X(0, 1) = 10) = 1 - F_{\text{Bin}(10, 0.2)}(4) = 1 - 0.9672 = 0.0328.$$

- (b) Embora já tenhamos apresentado na aula teórica o resultado sobre filtragens, pelo que sabemos, em particular, que $Y(0, 1) \sim Poi(2)$, vamos aproveitar a ocasião para o deduzir para esta situação.

$$\begin{aligned} P(Y(0, 1) = 0) &= \sum_{x=0}^{\infty} P(Y(0, 1) = 0 | X(0, 1) = x) P(X(0, 1) = x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} 0.8^x \frac{e^{-10} 10^x}{x!} \\ &= e^{-10} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{8^x}{x!} \\ &= e^{-10} e^8 = e^{-2} \\ &= P(Poi(2) = 0). \end{aligned}$$